• <u>Άσκηση πάνω στον Cantor.</u>

Έστω $\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ και $\lim(\alpha_\nu - \beta_\nu) = 0$

ΝΔΟ αν $\alpha_\nu \uparrow$ και $\beta_\nu \downarrow$

i) Η ακολουθία $\gamma_\nu = \beta_\nu - \alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι $\downarrow$

ii) Για την $\gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\gamma_\nu \geq 0$

iii) $\lim \alpha_\nu = \lim \beta_\nu$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

<u>ΛΥΣΗ</u>

i) $\gamma_{\nu+1} - \gamma_\nu = \beta_{\nu+1} - \alpha_{\nu+1} - (\beta_\nu - \alpha_\nu) =$

$$= \underbrace{\beta_{\nu+1} - \beta_\nu}_{(-)} \underbrace{- (\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu)}_{-(+)} \leq 0$$

Άρα, $\gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ είναι $\searrow$

ii) <u>Θέλει ΝΔΟ</u> $\gamma_\nu \geq 0 \Rightarrow \beta_\nu - \alpha_\nu \geq 0 \Rightarrow \alpha_\nu \leq \beta_\nu, \nu \in \mathbb{N}$

Ξέρουμε, ότι $\lim(\beta_\nu - \alpha_\nu) = 0 \Rightarrow \lim \gamma_\nu = 0$

Άρα, η $\gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ αφού φραγμένη και $\downarrow$

$$\Rightarrow \lim \gamma_\nu = \inf\{\gamma_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \inf\{\beta_\nu - \alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta_\nu - \alpha_\nu \geq 0 \Rightarrow \alpha_\nu \leq \beta_\nu, \ \nu \in \mathbb{N}$$

iii) Από το Θεώρημα του Cantor:

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \beta_\nu \leq \ldots \leq \beta_2 \leq \beta_1$$

$\alpha_\nu, \nu \in \mathbb{N} \uparrow$ με ay β_1, $\beta_\nu, \nu \in \mathbb{N} \downarrow$ με Κφ α_1

$\lim \beta_\nu = \lim(\beta_\nu - \alpha_\nu + \alpha_\nu) = \cancel{\lim(\beta_\nu - \alpha_\nu)}^{0} + \lim \alpha_\nu =$

$= \lim \alpha_\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$